パラメータ付き代数的局所コホモロジーの計算について : 半擬斉次孤立特異点の場合 (数式処理 : その研究と目指すもの)

鍋島, 克輔; 田島, 慎一

数理解析研究所講究録
第 1785 巻 2012 年 111-122

パラメータ付き代数的局所コホモロジーの計算について – 半擬斉次孤立特異点の場合 –

鍋島克輔*
NABESHIMA, KATSUSUKE
徳島大学大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部
INSTITUTE OF SOCIO-ARTS AND SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKUSHIMA

田島慎一†
TAJIMA, SHINICHI
筑波大学大学院数理物質系数学域
GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

Abstract

半擬斉次孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーの計算はポアンカレ多項式を使うことで効率的に計算できる。このポアンカレ多項式は変数の重みのみに依存しており, パラメータが係数に付いたとしても半擬斉次性が保たれている限りポアンカレ多項式は変わらない。この性質を利用することで半擬斉次孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーの効率的な計算法を得られることを紹介すると共に, その計算法をパラメータ付きの場合に拡張する。

1 はじめに

代数的局所コホモロジー [3] は様々な分野に応用 [2, 4] を持つ重要な概念である。例えば, 論文 [6, 18] にあるように代数的局所コホモロジーを用いることでイデアルのスタンダード基底やグレブナー基底, イデアルメンバーシップ問題を解くことが可能である。

本稿は半擬斉次孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーの効率的な計算方法について紹介する。論文 [9, 16, 18, 17] によって, 孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーの計算方法が述べられているが, 本稿では半擬斉次孤立特異点に特化した計算方法を考える。半擬斉次の場合には変数の "重みベクトル" から "ポアンカレ多項式" が構成され, そのポアンカレ多項式から代数的局所コホモロジーの計算のために重要な情報を簡単に得ることができるので, 従来の方法と比ベアルゴリズムの形はシンプルに構成されると共に計算効率も格段に上がる。第３章において, この計算アルゴリズムを紹介する。第４章では, 第３章で与えたアルゴリズムを定義多項式がパラメータを含む場合に拡張し, パラメータ付き代数的局所コホモロジーの計算アルゴリズムを紹介する。このアルゴリズムは, 定義多項式が係数にパラメータを含むとしても半擬斉次性が保たれる限りそのポアンカレ多項式は不変であることに着目することで導出される。パラメータ無しの場合と同じ情報がポアンカレ多項式から得られることより, 論文 [7] で与えた計算法に比べより効率的なアルゴリズムを構築できる。

半擬斉次孤立特異点と代数的局所コホモロジーに関する論文として [9, 10, 11, 16] があるが, 本稿の代数的局所コホモロジー計算アルゴリズムは今までのものより格段に効率的なので, これを活用することで, より複雑なものの解析が可能となる。

*nabesima@ias.tokushima-u.ac.jp
†tajima@math.tsukuba.ac.jp

2 準備

2.1 代数的局所コホモロジー

代数的局所コホモロジーについては論文 [1, 6, 14, 15, 16, 18] などによって詳しく述べられている。ここでは, 本稿で使う記号の定義と共に簡単に代数的局所コホモロジーを復習する。

本稿では, x を n 変数 $x_1,\ldots,x_n$ の省略形として使い, 0 を含む自然数の集合として $\mathbb{N}$ とする。K を $\mathbb{Q}$ または $\mathbb{C}$ とする。多項式環 $K[x]$ に対し, ($\mathbb{C}^n$ の) 原点 O に台を持つ代数的局所コホモロジー $H^n_{[O]}(K[x])$ を $H^n_{[O]}(K[x]) := \lim\limits_{k\to\infty} Ext^n_{K[x]}(K[x]/\langle x_1,x_2,\ldots,x_n\rangle^k, K[x])$ で定める。ここで, X を $\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍とすると, $H^n_{[O]}(K[x])$ の元は開集合対 $(X, X-\{O\})$ に対する標準的な相対被覆が定める相対Čech コホモロジーの要素として表現できることが知られている。これより, 記号 $\sum c_\lambda\left[\frac{1}{x^{\lambda+1}}\right]$ を $H^n_{[O]}(K[x])$ における代数的局所コホモロジー類として使う。このとき, x^κ と $\left[\frac{1}{x^{\lambda+1}}\right]$ の積は相対Čech コホモロジー群の定義より, 次で与えられる

$$x^\kappa\left[\frac{1}{x^{\lambda+1}}\right] = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{x^{\lambda+1-\kappa}}\right] & \lambda_i \geq \kappa_i, i=1,\ldots,n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ただし, $\kappa=(\kappa_1,\ldots,\kappa_n)\in\mathbb{N}^n, \lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{N}^n$, $\lambda+1-\kappa=(\lambda_1+1-\kappa_1,\ldots,\lambda_n+1-\kappa_n)$ である。原点 O に孤立特異点を持つ多項式 $f\in K[x]$ に対し H_f を

$$\boxed{H_f := \left\{\psi\in H^n_{[O]}(K[x]) \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\psi = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\psi = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\psi = 0\right\}}$$

で定め, 特異点に付随した代数的局所コホモロジーと呼ぶことにする。これは, 有限次元ベクトル空間となることが知られている。我々の目的はこの H_f の基底を計算するアルゴリズムを構成することである。

効率良く代数的局所コホモロジーの基底を計算するために, 代数的局所コホモロジー $\sum c_\lambda\left[\frac{1}{x^{\lambda+1}}\right]$ を多項式表現として $\sum c_\lambda\xi^\lambda$ で表すことにする。ただし, n 変数 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ はオリジナルの n 変数 x に対応するものとする。

代数的局所コホモロジーを計算する際, 項順序が必要である。ある項順序 $\succ$ において代数的局所コホモロジー類 φ が $\varphi := c_\lambda\xi^\lambda + \sum\limits_{\lambda\succ\lambda'} c_{\lambda'}\xi^{\lambda'}$ と書くことができるとする。このとき, ξ^λ を主項, $\xi^{\lambda'}$ を低階項と呼ぶ。

論文 [1, 6, 18] において, H_f の基底を計算するアルゴリズムが紹介されている。このアルゴリズムは f を原点に孤立特異点を持つ多項式としており, 半擬斉次な多項式のみならず多くの場合に計算可能なものである。次章では, f が半擬斉次な多項式で H_f の基底を計算する方法を紹介する。

2.2 半擬斉次性とポアンカレ多項式

ここでは, 半擬斉次の定義とポアンカレ多項式の定義を紹介する。本章では, $\mathbf{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_n)\in\mathbb{N}^n$ を n 変数 x の重みベクトルとし, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ に対して x^α は $\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ を意味することとする。

定義 1. 1. 項 $x^\alpha\in\mathbb{C}[x]$ に対し, 重みベクトル $\mathbf{w}$ に関する重み付き d を $d=|x^\alpha|_{\mathbf{w}} := \sum_{i=1}^n w_i\alpha_i$ により定める。

2. ゼロでない多項式 $f\in\mathbb{C}[x]$ が $(d;\mathbf{w})$ 型の擬斉次 であるとは, f のすべての項の重みベクトル $\mathbf{w}$ に関する重み付き次数が d に等しいこととする。

3. f を $\mathbb{C}[x]$ の多項式とする。まず, $ord_{\mathbf{w}}(f) = \min\{|x^\alpha|_{\mathbf{w}} : x^\alpha$は f を構成する項$\}$ ($ord_{\mathbf{w}}(0) := -1$) とする。多項式 f が $(d;\mathbf{w})$ 型 半擬斉次であるとは, 多項式 f が $f = f_0 + g$ なる形に表せることをいう。 ただしここで, f_0 は $(d;w)$ 型の半擬斉次多項式であり, $ord_{\mathbf{w}}(g) > d$ または $g = 0$ を満たすとする。 (本稿では, 半擬斉次多項式は擬斉次多項式を含むとした。)

例えば, $f_0 = x^3 + y^7 \in \mathbb{C}[x,y]$ において, 重み $\mathbf{w} = (7,3) \in \mathbb{N}^2$ を考えれば, f_0 は $(21;(7,3))$ 型の擬斉次多項式である。このときの各項の重み付き次数は 21 である。また, $f = x^3 + y^7 + 2xy^5 \in \mathbb{C}[x,y]$ と重み $\mathbf{w} = (7,3) \in \mathbb{N}^2$ を考えれば, これは項 xy^5 の重み付き次数が 22 であり, $x^3 + y^7$ は重み付き次数が 21 の擬斉次多項式かつ孤立特異点を持つので f は $(21;(7,3))$ 型の半擬斉次多項式である。

次にポアンカレ多項式を定義する。このポアンカレ多項式を使うことによって代数的局所コホモロジーの計算は格段に効率が良くなる。ポアンカレ多項式は, 本研究の重要な鍵の 1 つである。

定義 2. $(d;\mathbf{w})$ 型のポアンカレ多項式を次で定める。

$$P_{(d;\mathbf{w})}(t) := \frac{t^{d-w_1}-1}{t^{w_1}-1} \cdot \frac{t^{d-w_2}-1}{t^{w_2}-1} \cdots \frac{t^{d-w_n}-1}{t^{w_n}-1}$$

ここで, t は変数を意味する。

$(d;\mathbf{w})$ 型のポアンカレ多項式は必ず自然数を係数とする多項式となる。ポアンカレ多項式の例として次を考える。多項式 $f = x_1^3 + x_2^7 + 2x_1x_2^5 \in \mathbb{C}[x_1,x_2]$ は $(21;(7,3))$ 型半擬斉次である。$(21;(7,3))$ 型のポアンカレ多項式は

$$P_{(21;(7,3))}(t) = \frac{t^{21-7}-1}{t^3-1} \cdot \frac{t^{21-7}-1}{t^7-1} = 1 + t^3 + t^6 + t^7 + t^9 + t^{10} + t^{12} + t^{13} + t^{15} + t^{16} + t^{19} + t^{22}$$

で与えられる。

3 パラメータ無しの代数的局所コホモロジーの計算法

ここでは, 多項式 f_0 は原点に孤立特異点を持つ $(d;\mathbf{w})$ 型の擬斉次な多項式であるとする。また, 多項式 f は, $f := f_0 + g$ なる形を持つ $(d;\mathbf{w})$ 型半擬斉次な多項式とする。

本章では, H_f の基底を計算するアルゴリズムを紹介する。ただし, 半擬斉次多項式 $f \in \mathbb{C}[x]$ の係数にパラメータは付かないとする。パラメータが付く場合のアルゴリズムは次章で紹介する。

代数的局所コホモロジー H_f の基底を計算する方法は [6, 18] などによって紹介されている。本章で紹介するアルゴリズムは先行研究で得たアルゴリズムとは違い f が半擬斉次な多項式 のみ有効な方法である。アルゴリズムの詳細に入る前にまず, アルゴリズムの概要を述べる。

アルゴリズムの概要

(1). H_{f_0} の基底 Q をポアンカレ多項式を用いて計算する。

(2). (1) で得られた Q を用いて H_f の基底を計算する。

上のアルゴリズムの概要に従えば, ステップ (1) で H_{f_0} の基底を計算しなければならない。この基底を計算する効率的なアルゴリズムを構成するうえで次の 2 つの補題が必要となる ([9])。

補題 3. 多項式表現において考える。H_{f_0} の基底であり基底のすべての元が $(d_k;\mathbf{w})$ 型の擬斉次な多項式で構成されるものが存在する。ここで, $\deg(P_{(d;\mathbf{w})}(t)) \geq d_k$ である。

補題 4. $(d;\mathbf{w})$ 型のポアンカレ多項式を $P_{(d;\mathbf{w})}(t)=\sum_{i=1}^{m} b_i t^{a_i}$ とする (ただし, $b_i\in\mathbb{N}$)。ここで, H_{f_0} の基底 Q を考える。Q の元と重みベクトル $\mathbf{w}$ から定める集合を $Q_{\mathbf{w}}:=\{\deg_{\mathbf{w}}(\varphi)|\varphi\in Q\}$ とし, ポアンカレ多項式から決まる集合を $D_{P(d;\mathbf{w})}:=\bigcup_{i=1}^{m}\{\underbrace{a_i,\ldots,a_i}_{b_i\text{個}}\}$ とする。このとき, $D_{P(d;\mathbf{w})}=Q_{\mathbf{w}}$ となる。

ここで重要なことは, ポアンカレ多項式の情報から H_{f_0} の基底となる元の主項の重みの集合 $Q_{\mathbf{w}}$ が得られることである。ポアンカレ多項式は重みだけで簡単に求めることが可能であることよりこの集合 $D_{P(d;\mathbf{w})}$ 即ち $Q_{\mathbf{w}}$ は容易に求められる。また, 補題 3 より H_{f_0} の基底はすべて擬斉次としてよいので H_{f_0} の基底を求める際は $D_{P(d;\mathbf{w})}$ に属している重みで擬斉次になる項のみを考えればよい。この点において, 擬斉次で無い場合の孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジー計算アルゴリズム [6, 18] より効率的であると考えられる。次は H_{f_0} の基底を計算するアルゴリズムである。

アルゴリズム 1. (H_{f_0} の基底)
Input: f_0:$(d;\mathbf{w})$ 型の擬斉次多項式, $\mathbf{w}$:重みベクトル, $\succ$:重み付き項順序
Output: Q: H_{f_0} の基底 (多項式表現),
BEGIN
$G\leftarrow\{x^{\alpha}|$ 各 $1\leq i\leq n$ において $\frac{\partial f_0}{\partial x_i}$を構成する項 $\}$
$G'\leftarrow\{\xi^{\alpha}|x^{\alpha}\in G\}$
$Q\leftarrow K[\xi]/\langle G'\rangle$ の標準単項を計算 ($\langle G'\rangle$ は G' から生成させるイデアルを意味する)
$Q_{\mathbf{w}}\leftarrow\{\deg_{\mathbf{w}}(\varphi)|\varphi\in Q\}$
$D_{P(d;\mathbf{w})}\leftarrow$ ポアンカレ多項式 $P_{(d;\mathbf{w})}(t)$ から補題 4 の集合を計算
$D\leftarrow D_{P(d;\mathbf{w})}\backslash Q_{\mathbf{w}}$;
while $D\neq\emptyset$ **do**
　$N\leftarrow\{k|D$ 内の最小値 $\}$; $D\leftarrow D\backslash N$
　LL $\leftarrow$ 重みが $k\in N$ となる項の次数 (*1)
　$L\leftarrow$ LL から $\succ$ の低い 2 の元 $\{h_1,h_2\}$ を選ぶ ; LL $\leftarrow$ LL $\backslash\{h_1,h_2\}$
　$j\leftarrow N$ の要素数
　while $j\neq 0$ **do**
　　$p_1\leftarrow\xi^{\lambda}+\sum_{\alpha\in L\backslash\{\lambda\}}c_{\alpha}\xi^{\alpha}$ (c_{α} は未定係数, λ は $\succ$ において L 内で最大) (*2)
　　if $\frac{\partial f_0}{\partial x_i}\cdot p_1=0$ となる c_{α} の解が存在 $(i=1,\ldots,n)$ **then**
　　　$p\leftarrow p_1$ の未定係数に得られた解を代入 ; $Q\leftarrow Q\cup\{p\}$; $j\leftarrow j-1$
　　end-if
　　$L\leftarrow L\cup\{$LL の $\succ$ に関して最小の元 $\}$
　　LL $\leftarrow$ LL $\backslash\{$LL の $\succ$ に関して最小の元 $\}$
　end-while
end-while
return Q
END

アルゴリズム 1 の (*1) において, 重みが k となる項を探す必要がある。この場合, 論文 [6, 18] に書かれている低階項候補になる条件を使うことで, より速く効率的に探すことが可能となる。(*2) では未定係数を

使い多項式 p_1 を構成する。未定係数の決定は条件 $\frac{\partial f_0}{\partial x_1}(x)\cdot p_1=\frac{\partial f_0}{\partial x_2}(x)\cdot p_1=\cdots=\frac{\partial f_0}{\partial x_n}(x)\cdot p_1=0$ をチェックすることで決定される。この計算法は先行研究 [6, 18] で行った方法と同じである。

例 5. アルゴリズム 1 を使い $f_0=x^3+xy^5\in\mathbb{C}[x,y]$ に付随する代数的局所コホモロジーの基底を計算する。変数 (x,y) への重み $(5,2)$ を考えると f_0 は $(15;(5,2))$ 型擬斉次多項式である。$\frac{\partial f_0}{\partial x}=3x^2+y^5$, $\frac{\partial f_0}{\partial y}=5xy^4$ より, $\frac{\partial f_0}{\partial x},\frac{\partial f_0}{\partial y}$ を構成する項の集合は $G=\{x^2,y^5,xy^4\}$ である。多項式表現で計算することからここでは形式的に x を ξ, y を η と表すことにする。G を ξ,η で書きなおし $G'=\{\xi^2,\eta^5,\xi\eta^4\}$ を得る。次に $\mathbb{C}[\xi,\eta]/\langle G'\rangle$ の標準単項を計算する。このとき標準単項の集合は $Q=\{1,\xi,\eta,\xi\eta,\eta^2,\xi\eta^2,\eta^3,\xi\eta^3,\eta^4\}$ となる。重みは $\mathbf{w}=(5,2)$ であるので, Q の元の重み集合は $Q_{\mathbf{w}}=\{0,2,4,5,6,7,8,9,11\}$ となる。ここで, $(15;(5,2))$ 型のポアンカレ多項式を計算する。ポアンカレ多項式は

$$P_{(15;(5,2))}(t)=\frac{t^{15-5}-1}{t^5-1}\cdot\frac{t^{15-2}}{t^2-1}=1+t^2+t^4+t^5+t^6+t^7+t^8+t^9+t^{10}+t^{11}+t^{12}+t^{14}+t^{16}$$

となる。補題 *4* より, $P_{(15;(5,2))}(t)$ の各項の次数が H_{f_0} の基底となる元の主項の重みを表しているので, この情報を使い H_{f_0} の基底を計算する。この重みの集合は $D_{P(15;(5,2))}=\{0,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,16\}$ となる。ここで H_{f_0} の定義よりすでに計算されてある Q は明らかに H_{f_0} の基底の一部になるので考える重みは $D=D_{P(15;(5,2))}\backslash Q_{\mathbf{w}}=\{10,12,14,16\}$ のみである。ここで補題 *3* を適用する。基底となる元は擬斉次であるので重みが, *10, 12, 14, 16* となる項のみを選び未定係数法で元を求める。重みが *10* となる項は ξ^2,η^5 のみなので $p_1=\xi^2+c_1\eta^5$ とする（ここで項順序として重み付きかつ $\xi\succ\eta$ を考えた)。$\frac{\partial f_0}{\partial x}\cdot p_1=\frac{\partial f_0}{\partial y}\cdot p_1=0$ を満たす c_1 は $c_1=-3$ である。したがって, 新たな元 $p=\xi^2-3\eta^5$ を得た。同様に *12, 14, 16* の時も元を得ることができ代数的局所コホモロジーの基底として $Q\cup\{\xi^2-3\eta^5,\xi^2\eta-3\eta^6,\xi^2\eta^2-3\eta^7,\xi^2\eta^3-3\eta^8\}$ を得る。

次に半擬斉次の場合を考える。次の定理は H_{f_0} の基底から H_f の基底を計算するための重要なものである。

定理 6 ([9]). アルゴリズム 1 から得られた H_{f_0} の基底を Q とし, Q の要素数を $\#Q=k$ とし, $Q:=\{q_1,q_2,\ldots,q_k\}$ とする。 このとき, 各 $i=1,\ldots,k$ において, $\deg_{\mathbf{w}}(q_i)>\deg_{\mathbf{w}}(g_i)$ であり $h_i=q_i+g_i\in H_f$ となる g_i が唯一存在し, $\{h_1,\ldots,h_k\}$ は H_f の基底となる。

各 g_i の決定方法は, アルゴリズム 1 の直後に既述したように $\deg_{\mathbf{w}}(q_i)$ より小さい項を選び, 未定係数法を使うことにより g_i が決定される。これにより H_f の基底を計算することができる。次が H_f の基底を計算するアルゴリズムであり, 半擬斉次の場合においては [18] のアルゴリズムより計算の効率化が図られている。

アルゴリズム **2.**
Input: f: $(d;\mathbf{w})$ 型の半擬斉次多項式, $\mathbf{w}$:重みベクトル, $\succ$:重み付き項順序
Output: H: H_f の基底 (多項式表現),
BEGIN
$G\leftarrow\{x^\alpha|$ 各 $1\le i\le n$ において $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ を構成する項 $\}$
$G'\leftarrow\{\xi^\alpha|x^\alpha\in G\}$;
$H\leftarrow K[\xi]/\langle G'\rangle$ の標準単項を計算
$Q\leftarrow$ アルゴリズム 1 より H_{f_0} の基底を計算
$Q\leftarrow Q\backslash H$

while $Q \neq \emptyset$ **do**

$q \leftarrow Q$ で $\succ$ に関して最小の多項式

$L \leftarrow q$(擬斉次多項式) より小さい重み次数の単項の集合 (*3)

$h \leftarrow q + \sum_{\alpha \in L} c_\alpha \xi^\alpha$ となる H_f の元を計算 (c_α を求める) (*4)

$H \leftarrow H \cup \{h\}$

$Q \leftarrow Q \backslash \{q\}$;

end-while

return H

END

アルゴリズム 1 より, H_f の基底の主部 (単項だけなら主項と呼ぶが, 線形結合の形もあるので主部と呼ぶ) となる部分が決定されているので, あとはその主部よりも重みが小さい低階項を探し未定係数法を用いて決定すればよい。(*3) の低階項の候補は重み付き項順序と [6, 18] で使った低階項候補条件を組み合わせることで効率的に候補を得ることができる。また, (*4) で未定係数を求めるがこのとき定理 6 より必ず解が存在し h は常に決定される。論文 [18] で与えたアルゴリズムと比較すると, ポアンカレ多項式により H_f の基底となる主項候補の数が大幅に抑えられると共に低階項候補の数も抑えられ効率的なアルゴリズムとなっている。

実際, 論文 [18] のアルゴリズムと今回紹介したアルゴリズム 2 を計算機代数システム Risa/Asir [1)]に実装し計算比較をした結果が次の表である。これより, 大幅に効率化が図られていることが分かる。ここで使用した計算機は [OS: Windows 7, CPU: Intel(R) Core(TM) i7 CPU 920@ 2.67 GHz 2.67 GHz, RAM: 8 GB] であり Risa/Asir は version 20091015 (Kobe Distribution) を使用した。

半擬斉次多項式	ミルナー数	アルゴリズム	cpu time (sec.)
$(y^{10}+x^3)^2+x^6+x^{10}y^{10}$	95	アルゴリズム 2	0.032
		論文 [18]	0.733
$(y^6+x^5)^2+x^5y^6$	99	アルゴリズム 2	0.047
		論文 [18]	13.09
$(y^{13}+x^3)^2+x^6$	125	アルゴリズム 2	0.062
		論文 [18]	1.982
$(y^4+xz^3+x^3)^2+y^8+z^9$	280	アルゴリズム 2	1.108
		論文 [18]	1389
$(y^{13}+x^3)^3+x^9$	304	アルゴリズム 2	0.343
		論文 [18]	57.14
$(y^{13}+x^3)^3+x^9+x^{10}y$	304	アルゴリズム 2	26.41
		論文 [18]	69.23
$((y^6+x^5)^2+x^5y^6)^2+x^{20}$	437	アルゴリズム 2	0.749
		論文 [18]	409.6

再度注意しておくと, アルゴリズム 2 は半擬斉次のときのみ有効なアルゴリズムである。半擬斉次でない一般の孤立特異点の場合は論文 [18] のアルゴリズムを使用することになる。

1)Risa/Asir はオープンソースの計算機代数 (数式処理) システムです [12]。神戸版は OpenXM コミッターによって開発されています。オリジナルの Risa/Asir は富士通研究所で開発されました。
http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir-ja.html

4 パラメータ付き代数的局所コホモロジーの計算

本章では3章で構成した半擬斉次孤立特異点に付随した代数的局所コホモロジー計算アルゴリズムをパラメータを含む場合に拡張する。すなわち, 半擬斉次な多項式が係数にパラメータを含む場合を考える。本章では多項式 f_0 を $(d;\mathbf{w})$ 型の擬斉次な多項式とし, パラメータに値を代入したとき generic には孤立特異点になる場合を想定する。パラメータを係数に含むとパラメータの値によって孤立特異点にならない場合がある。もし, f_0 が孤立特異点を持つならば対象とする多項式 f は $f := f_0 + g$ の形を持つ $(d;\mathbf{w})$ 型半擬斉次な多項式であるとする。

本章では 2つのタイプ のパラメータ付き代数的局所コホモロジーの計算法を紹介する。1つはパラメータのとる値によって分割されたパラメータの領域 (strata) において H_f の基底となる元の係数がゼロになる可能性がある場合と, もう1つはその領域 (strata) において係数がゼロにならないものである。前者をタイプ1として後者をタイプ2とする。2つのタイプ共にパラメータにどのような値を代入しても代数的局所コホモロジーの基底となる。

本稿で意味するパラメータとは『各パラメータはどのような値も $\mathbb{C}$ からとることができる』とする。ここで, m 個のパラメータを $a := a_1, \ldots, a_m$ とする。また, パラメータのとる値の空間の分割が必要になるので共通ゼロ点の集合として $\mathbb{V}(f_1, \ldots, f_s) = \{(b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{C}^m | f_1(b_1, \ldots, b_m) = \cdots = f_s(b_1, \ldots, b_m) = 0\}$ を使用する。3章のアルゴリズムをパラメータを持つ場合に拡張するため, まず H_{f_0} から考える。孤立特異点を念頭においていることから f_0 が孤立特異点を持つためのパラメータの条件が必要である。すなわち, f_0 のヤコビイデアルが ゼロ次元になるパラメータの条件のときのみ を考えるので, f_0 のヤコビイデアルの次元判定が出力の正確さの観点から必要である。半擬斉次の場合, このパラメータ付きイデアルの次元判定は包括的グレブナー基底系 [5, 13, 19] を使うことで完璧に分割 (stratify) 可能である。したがって, アルゴリズムが正確な出力をするために;

(1) 包括グレブナー基底系を使い0次元となるパラメータの領域 (strata) を求め, この領域に対して本稿のアルゴリズムを適用する。

(2) 0次元にならない領域は今回は考えず, その領域のみ出力する。(f_0 の特異点集合が0次元でないにもかかわらず, 半擬斉次 $f_0 + g$ の特異点集合が0次元になることがあるが今回はこの場合は考えない。もし考えるのなら論文 [7] のアルゴリズムを適用すれば求められる。)

本稿で扱うアルゴリズムはポアンカレ多項式を使用しているので必ず停止するアルゴリズムである。もし, (2) の領域内で計算したとしてもアルゴリズムは停止するが, 出力は正しくない。これを除くためにもこの次元の考察が不可欠である。

正確にパラメータ付き代数的局所コホモロジーの基底を計算するには, パラメータ空間を適切に分割 (stratify) し更に各 stratum 上で計算を行う必要がある。本稿では各 stratum を アルゴリズム内では $\mathbb{A}$ または $\mathbb{B}$ で表し, 具体例では共通ゼロ点集合の記号を使って $\mathbb{V}(h_1, \ldots, h_s) \backslash \mathbb{V}(q_1, \ldots, q_t)$ で表す ($h_1, \ldots, h_s, q_1, \ldots, q_t \in \mathbb{C}[a_1, \ldots, a_m]$)。

4.1 タイプ1

次元の分類が出来ているとする。このとき, f_0 のヤコビイデアルが0次元となるパラメータの各 stratum では多項式 f_0 はパラメータがどのような値を取ろうが $(d;\mathbf{w})$ 型の擬斉次な多項式である。すなわち, パラメータがどのような値をとろうが $(d;\mathbf{w})$ 型のポアンカレ多項式は不変であり, H_{f_0} の基底となる元の重み次数も不変である。

パラメータを持つとパラメータの値によって $\dfrac{\partial f_0}{\partial x_i}$ $(i=1,\ldots,n)$ を構成する項が変化する。しかしながら, それらの項から生成されるイデアルの共通部分はパラメータで消えない場合のすべての項から生成されるイデアル I で表される。$\mathbb{C}[x]/I$ の標準単項を ξ で表したものが明らかに基底の一部となる。もちろん, パラメータの値によってこの標準単項以外に単項となるものが存在するが, それは次の計算で得られる線形結合の形の元にパラメータの値を代入した結果, 一つの項だけが残る場合となる。

線形結合の元の計算を考える。ポアンカレ多項式と単項の形がすでに計算できているので, アルゴリズム1と同様に, 重みの集合が差し引きされた残りの重み次数の集合を考えればよい。今, 擬斉次の場合を考えているので補題3より同じ重みの項を探し未定係数法を使い線形結合の形の元を計算する。このときパラメータ付きの線形連立方程式を解く必要がある。分数の分母がゼロにならないようにパラメータの値による場合分けが必要になる。

以上の考察の結果, H_{f_0} の基底は次のように計算される。次のアルゴリズムはアルゴリズムの見易さのためサブアルゴリズムを2つ使っているが, これはアルゴリズム1をパラメータに対応するように拡張したものである。

アルゴリズム **3.** **(**タイプ **1** の H_{f_0} の基底**)**
Input: f_0:$(d;\mathbf{w})$ 型の擬斉次多項式, $\mathbf{w}$:重みベクトル, $\succ$:重み付き項順序
Output: $\{(\mathbb{A}_1,Q_1),\ldots,(\mathbb{A}_l,Q_l)\}$: $\mathbb{A}_i\subset\mathbb{C}^m$ 上のパラメータの値において Q_i は H_{f_0} の基底 $(i=1,\ldots,l)$,
　　$\{\mathbb{B}_1,\ldots,\mathbb{B}_{k_1}\}$:ゼロ次元とならなかったパラメータの stratum
BEGIN
$\{\mathbb{B}_1,\ldots,\mathbb{B}_{k_1}\}\leftarrow f_0$ のヤコビイデアルがゼロ次元でないパラメータの領域
$\{\mathbb{A}_1,\ldots,\mathbb{A}_{k_2}\}\leftarrow f_0$ のヤコビイデアルがゼロ次元となるパラメータの領域
$Z\leftarrow\emptyset$; $G\leftarrow\{x^\alpha|$ 各 $1\le i\le n$ において $\frac{\partial f_0}{\partial x_i}$ を構成する項 $\}$; $G'\leftarrow\{\xi^\alpha|x^\alpha\in G\}$
$Q\leftarrow K[\xi]/\langle G'\rangle$ の標準単項を計算
$Q_{\mathbf{w}}\leftarrow\{\deg_{\mathbf{w}}(\varphi)|\varphi\in Q\}$
$D_{P(d;\mathbf{w})}\leftarrow$ ポアンカレ多項式 $P_{(d;\mathbf{w})}(t)$ から補題4の集合を計算
$D\leftarrow D_{P(d;\mathbf{w})}\backslash Q_{\mathbf{w}}$
for $\mathbb{A}_k$ **each** $k=1,\ldots,k_2$ **do**
　$Z\leftarrow Z\cup\mathsf{para\_alc}(\mathbb{A}_k,D,Q,f_0)$
end-for
return $(Z,\{\mathbb{B}_1,\ldots,\mathbb{B}_{k_1}\})$
END

サブアルゴリズム **4.** $\mathsf{para\_alc}(\mathbb{A},D,Q,f_0)$
Input: アルゴリズム3参照
Output: $\{(\mathbb{A}_1,Q_1),\ldots,(\mathbb{A}_l,Q_l)\}$: $\mathbb{A}_i$ 上の値において Q_i $(i=1,\ldots,l)$ は H_{f_0} の基底かつ $\mathbb{A}=\mathbb{A}_1\cup\cdots\cup\mathbb{A}_l$,
BEGIN
if $D=\emptyset$ **then** return$(\mathbb{A},Q)$ **end-if**
$Z\leftarrow\emptyset$; $N\leftarrow\{k|D$ 内の最小値 $\}$; $D\leftarrow D\backslash N$
LL $\leftarrow$ 重みが $k\in N$ となる項の次数の集合
$L\leftarrow$ LL から $\succ$ の低い2の元 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ を選ぶ
LL $\leftarrow$ LL $\backslash\{\alpha_1,\alpha_2\}$
$j\leftarrow N$ の要素数

$\{(\mathbb{A}_1, Q_1), \ldots, (\mathbb{A}_t, Q_t)\} \leftarrow$ para_linear_form$(j, \mathbb{A}, L, \mathrm{LL}, Q, f_0)$
for $(\mathbb{A}_k, Q_k)$ **each** $k = 1, \ldots, t$ **do**
  $Z \leftarrow Z\cup$ para_alc$(\mathbb{A}_k, D, Q_k, f_0)$
end-for
return Z
END

サブアルゴリズム **5.** para_linear_form$(j, \mathbb{A}, L, \mathrm{LL}, Q, f_0)$
BEGIN
if $j = 0$ **then** return $(\mathbb{A}, Q)$ **end-if**
$Z \leftarrow \emptyset$; $p \leftarrow \xi^\lambda + \sum_{\alpha \in L \setminus \{\lambda\}} c_\alpha \xi^\alpha$ （c_α は未定係数, λ は $\succ$ において L 内で最大）
$\{(\mathbb{A}_1, p_1), \ldots, (\mathbb{A}_s, p_s)\} \leftarrow \frac{\partial f_0}{\partial x_i} \cdot p$ をチェックし c_α の解が存在すれば p_1 に代入（解ありの場合）(*5)
$\{\mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_{s'}\} \leftarrow$ 解が存在しなかったパラメータの stratum（解なしの場合）(*6)
$L \leftarrow L \cup \{$LL 内で $\succ$ に関して最小の元 $\}$; LL $\leftarrow$ LL $\setminus \{$LL 内で $\succ$ に関して最小の元 $\}$
for $(\mathbb{A}_k, p_k)$ **each** $k = 1, \ldots, s$ **do**
  $Z \leftarrow Z\cup$ para_linear_form$(j-1, \mathbb{A}_k, L, \mathrm{LL}, Q \cup \{p_k\}, f_0)$
end-for
for $\mathbb{B}_k$ **each** $k = 1, \ldots, s'$ **do**
  $Z \leftarrow Z\cup$ para_linear_form$(j, \mathbb{B}_k, L, \mathrm{LL}, Q, f_0)$
end-for
return Z
END

上述したようにこの計算法では, パラメータが特別な値を取ったとき, H_{f_0} の基底となる元の低階項のうち幾つかの項の係数がゼロになる可能性がある。サブアルゴリズム 5 (*5), (*6) においてパラメータ付き線形連立方程式を解いている。このとき, 解はパラメータの条件に依存する。もちろん, 解が存在しない場合もあり得る。解が存在するときのパラメータ空間の各 stratum を $\mathbb{A}_i$ で表し, 存在しないときの各 stratum を $\mathbb{B}_j$ で表している $(i = 1, \ldots, s, j = 1, \ldots, s')$。

アルゴリズム 2 と同様に, H_{f_0} の基底を使い半擬斉次な多項式のパラメータ付き代数的局所コホモロジー計算は行われる。これは, 各パラメータの strata でアルゴリズム 2 を実行するだけであるが, パラメータ付きの線形連立方程式を解くことが必要となり場合分けをしなければならないが, 主部が求められているので低階項候補を探せば必ず元は定まる。このことに注意すれば半擬斉の場合も次のように計算される。

アルゴリズム **6.** (タイプ **1** の H_f の基底)
Input: f: $(d; \mathbf{w})$ 型の半擬斉次多項式, $\mathbf{w}$:重みベクトル, $\succ$:重み付き項順序
Output: H: H_f の基底 (多項式表現),
BEGIN
$Z \leftarrow \emptyset$; $G \leftarrow \{x^\alpha |$ 各 $1 \le i \le n$ において $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ を構成する項 $\}$; $G' \leftarrow \{\xi^\alpha | x^\alpha \in G\}$
$H \leftarrow K[\xi]/\langle G' \rangle$ の標準単項を計算
$\{(\mathbb{A}_1, Q_1), \ldots, (\mathbb{A}_s, Q_s)\} \leftarrow$ アルゴリズム 3 より H_{f_0} の基底を計算
for $(\mathbb{A}_k, Q_k)$ **each** $k = 1, \ldots, s$ **do**
  $Z \leftarrow Z\cup$ semi_quasi$(\mathbb{A}_k, Q_k \setminus H, H, f)$

end-for
return Z
END

サブアルゴリズム **7** semi_quasi($\mathbb{A}, Q, H, f$)
Input: アルゴリズム 6 参照
Output: $\{(\mathbb{A}_1, H_1), \ldots, (\mathbb{A}_l, H_l)\}$: $\mathbb{A}_k$ 上の値において H_k は H_f の基底であり $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{A}_l$,
BEGIN
if $Q = \emptyset$ **then** return $(\mathbb{A}, H)$ **end-if**
$Z \leftarrow \emptyset$
$q \leftarrow Q$ 内で $\succ$ に関して最小の多項式
$Q \leftarrow Q \backslash \{q\}$
$L \leftarrow q$ より小さい重みの単項の次数の集合
$h \leftarrow q + \sum_{\alpha \in L} c_\alpha \xi^\alpha$
$\{(\mathbb{A}_1, h_1), (\mathbb{A}_2, h_2), \ldots, (\mathbb{A}_s, h_s)\} \leftarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \cdot h = 0$ をチェックし c_α の解を求める $(i = 1, \ldots, n)$ (*7)
for (A_k, h_k) **each** $k = 1, \ldots, s$ **do**
　$Z \leftarrow Z \cup$ semi_quasi($\mathbb{A}_k, Q_k, H \cup \{h_k\}$)
end-for
return Z
END

サブアルゴリズム 5 と同様にサブアルゴリズム 7 (*7) において, パラメータ付き線形連立方程式を扱う必要がある。この計算過程で, 解はパラメータの条件によって複数出る場合がある。

以上より, 半擬斉次多項式で定義された f のパラメータ付き代数的局所コホモロジーの基底の計算が可能となった。

例 7. 多項式 $f = x^3 + y^{10} + axy^7 + bxy^8$ を考える。ここで, x, y は変数, a, b はパラメータである。この多項式は重み $(10, 3)$ に対して $(10, 3)$ 型の半擬斉次多項式である。擬斉次部は $f_0 = x^3 + y^{10}$ である。まず, アルゴリズム 3 より H_{f_0} の基底を求める。幸い f_0 にはパラメータが存在しないのでアルゴリズム 1 と同じ働きをする。次が H_{f_0} の基底となる。ここで, x は ξ, y は η に対応するものとする。

$$\{\eta^8\xi, \eta^7\xi, \eta^6\xi, \eta^5\xi, \eta^4\xi, \eta^3\xi, \eta^2\xi, \eta\xi, \xi, \eta^8, \eta^7, \eta^6, \eta^5, \eta^4, \eta^3, \eta^2, \eta, 1\}$$

次に, H_{f_0} の基底の情報を使い H_f の基底を計算する。このとき, パラメータ a, b が含まれるので, パラメータ付き連立方程式を解くことになる。この場合, パラメータによる分類は必要なく $\mathbb{C}^2$ の任意の要素をパラメータに代入しても代数的局所コホモロジーの基底となる次を得ることができる。(多項式表現)
$\{\eta^5\xi, \eta^4\xi, \eta^3\xi, \eta^2\xi, \eta\xi, \xi, \eta^6, \eta^5, \eta^4, \eta^3, \eta^2, \eta, 1,\ -\frac{1}{3}a\eta\xi^3 - \frac{1}{3}b\xi^3 + \frac{7}{30}a^2\eta^4\xi^2 + \frac{1}{2}ba\eta^3\xi^2 + \frac{4}{15}b^2\eta^2\xi^2 + \eta^8\xi - \frac{7}{10}a\eta^{11} - \frac{4}{5}b\eta^{10},\ -\frac{1}{3}a\xi^3 + \frac{7}{30}a^2\eta^3\xi^2 + \frac{1}{2}ba\eta^2\xi^2 + \frac{4}{15}b^2\eta\xi^2 + \eta^7\xi - \frac{7}{10}a\eta^{10} - \frac{4}{5}b\eta^9,$
$\frac{7}{30}a^2\eta^2\xi^2 + \frac{7}{30}ba\eta\xi^2 + \eta^6\xi - \frac{7}{10}a\eta^9,\ -\frac{1}{3}a\eta\xi^2 - \frac{1}{3}b\xi^2 + \eta^8,\ -\frac{1}{3}a\xi^2 + \eta^7\}$

代数的局所コホモロジーを用いたスタンダード基底計算方法は論文 [6, 18] などに紹介されているが, 同様の方法をアルゴリズム 6 で出力された各 stratum 上の基底に適用すればパラメータ付きスタンダード基底は簡単に計算される。

4.2 タイプ2

タイプ1での H_f の基底の元の展開式の各項の係数は一般にパラメータに依るため, これらの係数はパラメータ値によってはすべてが0でないわけではなかった。この状態でメンバーシップ問題 [6, 18] などの主項以外の項が大きく影響を及ぼすような問題へ適用するといろいろな前処理が必要となり扱いづらい。そこで, 各 stratum 上で基底代数的局所コホモロジーのすべての項が消えないような, パラメータ付き基底代数的局所コホモロジーを考える。

この計算方法はいくつか考えられる。まず, 簡単なものとしてタイプ1の計算後すべての係数を "ゼロになるか", "ゼロにならないか" でチェックをし, 条件をその strata に付け加えればよい。これによりここで呼ぶタイプ2のパラメータ付き基底代数的局所コホモロジーは計算される。

次に考えられる計算方法はタイプ1の計算途中から係数がゼロかゼロでないかを判断していく方法である。まず, 単項の元を求めるときパラメータの値によって $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ を構成する項は違ってくるので, アルゴリズム6での標準単項を計算すパート $K[\xi]/\langle G'\rangle$ の出力が異なる。これは $\langle G'\rangle$ の包括的グレブナー基底系 [5, 13, 19] を計算することでこの分割は可能である。単項の形のものを分割したあと, 次に係数に影響を及ぼす計算はパラメータ付き線形連立方程式の解法である。解を得た時に "ゼロになる条件" と "ゼロにならない条件" を今まで計算した strata に組み込むことで計算の最中から strata を分割して計算することが可能となりタイプ2の基底代数的局所コホモロジー計算が可能となる。このタイプ2の出力の例として次の例がある。この例とタイプ1の例を比べることで2つの違いが分かるであろう。

例 8. タイプ1での例と同様の例として多項式 $f = x^3 + y^{10} + axy^7 + bxy^8$ を考える。ここで, x, y は変数, a, b はパラメータである。この多項式は重み $(10, 3)$ に対して $(10, 3)$ 型の半擬斉次多項式である。タイプ2のパラメータ付きの H_f の基底を計算すると次のようになる。

・$\mathbb{V}(a, b)$ のとき,

$\{\eta^8\xi, \eta^7\xi, \eta^6\xi, \eta^5\xi, \eta^4\xi, \eta^3\xi, \eta^2\xi, \eta\xi, \xi, \eta^8, \eta^7, \eta^6, \eta^5, \eta^4, \eta^3, \eta^2, \eta, 1\}$

・$\mathbb{V}(a)\backslash\mathbb{V}(a, b)$ のとき,

$\{\eta^6\xi, \eta^5\xi, \eta^4\xi, \eta^3\xi, \eta^2\xi, \eta\xi, \xi, \eta^7, \eta^6, \eta^5, \eta^4, \eta^3, \eta^2, \eta, 1, -\frac{1}{3}b\xi^3 + \frac{4}{15}b^2\eta^2\xi^2 + \eta^8\xi - \frac{4}{5}b\eta^{10}, \frac{4}{15}b^2\eta\xi^2 + \eta^7\xi - \frac{4}{5}b\eta^9, -\frac{1}{3}b\xi^2 + \eta^8\}$

・$\mathbb{C}^2\backslash\mathbb{V}(ba)$ のとき,

$\{\eta^5\xi, \eta^4\xi, \eta^3\xi, \eta^2\xi, \eta\xi, \xi, \eta^6, \eta^5, \eta^4, \eta^3, \eta^2, \eta, 1, -\frac{1}{3}a\eta\xi^3 - \frac{1}{3}b\xi^3 + \frac{7}{30}a^2\eta^4\xi^2 + \frac{1}{2}ba\eta^3\xi^2 + \frac{4}{15}b^2\eta^2\xi^2 + \eta^8\xi - \frac{7}{10}a\eta^{11} - \frac{4}{5}b\eta^{10}, -\frac{1}{3}a\xi^3 + \frac{7}{30}a^2\eta^3\xi^2 + \frac{1}{2}ba\eta^2\xi^2 + \frac{4}{15}b^2\eta\xi^2 + \eta^7\xi - \frac{7}{10}a\eta^{10} - \frac{4}{5}b\eta^9, \frac{7}{30}a^2\eta^2\xi^2 + \frac{7}{30}ba\eta\xi^2 + \eta^6\xi - \frac{7}{10}a\eta^9, -\frac{1}{3}a\eta\xi^2 - \frac{1}{3}b\xi^2 + \eta^8, -\frac{1}{3}a\xi^2 + \eta^7\}$

・$\mathbb{V}(b)\backslash\mathbb{V}(a, b)$ のとき,

$\{\eta^5\xi, \eta^4\xi, \eta^3\xi, \eta^2\xi, \eta\xi, \xi, \eta^6, \eta^5, \eta^4, \eta^3, \eta^2, \eta, 1, -\frac{1}{3}a\eta\xi^3 + \frac{7}{30}a^2\eta^4\xi^2 + \eta^8\xi - \frac{7}{10}a\eta^{11}, -\frac{1}{3}a\xi^3 + \frac{7}{30}a^2\eta^3\xi^2 + \eta^7\xi - \frac{7}{10}a\eta^{10}, \frac{7}{30}a^2\eta^2\xi^2 + \eta^6\xi - \frac{7}{10}a\eta^9, -\frac{1}{3}a\eta\xi^2 + \eta^8, -\frac{1}{3}a\xi^2 + \eta^7\}$

このように4つの場合に分かれ各 stratum 上では基底の元の各項は決して消えることはない。

謝辞

本研究において第一著者は科学研究費 (課題番号:22740065), 第二著者は科学研究費 (課題番号:70155076) の助成を受けている。

参考文献

[1] 阿部隆行, 田島慎一, 孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーとヤコビイデアルに対するグレブナー基底の計算法. 数理解析研究所講究録 **1514**, pp.141-147, (2006).

[2] M. P. Brodmann and R. Y. Sharp, Local Cohomology, Cambridge Univ. Press (1998).

[3] A. Grothendieck, Local Cohomology, notes by R. Hartshorne, Lecture Notes in Math. **41**, Springer, (1967).

[4] G. Lyubeznik, Local Cohomology and its Applications, Dekker, (2002).

[5] K. Nabeshima, A speed-up of the algorithm for computing comprehensive Gröbner systems. *Proc. ISSAC'07*, pp. 299–306. AMC-Press (2007)

[6] 鍋島克輔, 中村弥生, 田島慎一, 代数的局所コホモロジーを利用したスタンダード基底・グレブナー基底の実装について, 数理解析研究所講究録 **1764**, pp.102-125, (2011).

[7] 鍋島克輔, 中村弥生, 田島慎一, パラメータ付き零次元代数的局所コホモロジーを用いたパラメトリック・スタンダード基底計算について, 京都大学数理解析研究所講究録掲載予定

[8] 中村弥生, 田島慎一, Inner modality 4 以下の半擬斉次孤立特異点に付随したホロノミック系について, 数理解析研究所講究録 **1431**, pp.55-67, (2005).

[9] Y. Nakamura and S Tajima, On weighted-degrees for algebraic local cohomologies associated with semiquasihomogeneous singularities, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **46**, pp. 105–117, (2007)

[10] Y. Nakamura and S Tajima, Unimodal singularities and differential operators *Sémin. Congr.,* **10**, pp. 191–208, Soc. Math. France, (2005)

[11] Y. Nakamura and S. Tajima, Algebraic local cohomologies and local b-functions Attached to semi-quasihomogeneous singularities with $L(f) = 2$, to apper.

[12] M. Noro and T. Takeshima, Risa/Asir- A computer algebra system. *Proc. ISSAC'92*, pp.387-396, ACM-Press, (1992).

[13] A. Suzuki and Y. Sato, A simple algorithm to compute comprehensive Gröbner bases using Gröbner Bases. *Proc. ISSAC'06*, pp. 326–331. AMC-Press (2006)

[14] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について. 数理解析研究所講究録 **1456**, pp.126-132, (2005).

[15] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について II. 数理解析研究所講究録 **1568**, pp.74-80, (2007).

[16] S. Tajima and Y. Nakamura, Algebraic local cohomology class attached to quasi-homogeneous isolated hypersurface singularities. *RIMS, Kyoto Univ.* **41**, pp.1 - 10, (2005)

[17] S. Tajima and Y. Nakamura, Annihilating ideals for an algebraic local cohomology class. *Journal of Symbolic Computation* **44**, pp.435 - 448, (2009)

[18] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **56**, pp. 341–361, (2009)

[19] V. Weispfenning, Comprehensive Gröbner bases. *Journal of Symbolic Computation* **14**(1), pp. 1–29 (1992)